L3 SM UE504P	Université de Tours	Année 2011-2012

Méthodes mathématiques pour la physique

16/12/2011 **durée de l'examen: 3h**

1. Soient $\{p_k(x)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ les polynômes orthogonaux moniques associés à la fonction poids $w(x) = 1+x^2$, sur l'intervalle $I = [-1,1]$. Calculer explicitement les polynômes $p_2(x)$, $p_3(x)$, ainsi que le produit scalaire $\Big(p_9(x), x^2 p_6'(x)\Big)$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t^2)^{\frac{3}{4}}\,dt$ à l'aide des fonctions euleriennes $B(p,q)$, $\Gamma(s)$ et les différentes identités qu'elles vérifient.

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pour } |x| \leq \pi, \\ 0 & \text{pour } |x| \geq \pi. \end{cases}$$
En utilisant le résultat, calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi s \sin \frac{\pi s}{6}}{1-s^2}\,ds.$$

4. Résoudre l'équation différentielle
$$g'' - 8g' + 7g = \cos x,$$
munie des conditions initiales $g(0) = g'(0) = 0$,
   - en utilisant la méthode des fonctions de Green,
   - à l'aide de la transformation de Laplace.

5. Soient γ une courbe lisse fermée dans le plan xy et D le domaine délimité par γ. On note $L =$ longueur(γ) et $A =$ aire(D). Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité isopérimétrique
$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$
Soit $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [0,L] \end{cases}$ la paramétrisation naturelle de γ par la longueur de l'arc parcouru (c'est-à-dire, pour tout t nous avons $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 1$ et $dt = d\ell$).
   - Comme γ est fermée, on a $x(L) = x(0)$, $y(L) = y(0)$. On peut donc prolonger $x(t)$ et $y(t)$ sur $\mathbb{R}$ de façon périodique avec la période L. Considérons les développements de Fourier
   $$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \qquad y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$
   Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont evidemment réelles. Quelles conditions cela impose sur les coefficients de Fourier $\{c_n\}$ et $\{d_n\}$?

- Ecrire les développements de Fourier des fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$. En utilisant ces développements et les résultats précédents, montrer que

$$L = \int_0^L \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^L \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right) dt = \frac{4\pi^2}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right).$$

- En utilisant la formule de Green, montrer que

$$A = \int_\gamma y dx = \int_0^L y(t)x'(t)dt = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n \bar{d}_n$$

- Montrer que $|2inc_n\bar{d}_n| \leq 2|n|\,|c_n|\,|d_n| \leq |n|\left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right)$. En déduire l'inégalité isopérimétrique

$$\frac{A}{\pi} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right) = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

- Montrer que l'égalité $A = \dfrac{L^2}{4\pi}$ implique que γ est un cercle (autrement dit, les cercles maximisent l'aire à périmètre fixe).